ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ II**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2011-2012**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: ***120 phút***

Câu 1:

Áp dụng quy tắc L'Hospital 2 lần, ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-3x}+\ln(1+x)-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1-3x)^{-\frac{2}{3}}+\frac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2(1-3x)^{-\frac{5}{3}}-\frac{1}{(1+x)^2}}{2}$$

$$=\mathbf{-\frac{3}{2}}$$

Câu 2:

Ta có: $y(x) = (2x - 1).\cos^2 x = (2x-1).\frac{\cos 2x+1}{2} = \left(x-\frac{1}{2}\right).(\cos 2x+1).$

Áp dụng công thức Leibnitz, ta có:

$$y^{(4n)}(x)=\sum_{k=0}^{4n} C_{4n}^{k}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{(k)}(\cos 2x+1)^{(4n-k)}=C_{4n}^{0}\left(x-\frac{1}{2}\right)(\cos 2x+1)^{(4n)}+$$

$$+C_{4n}^{1}\left(x-\frac{1}{2}\right)'(\cos 2x+1)^{(4n-1)}+\ldots+C_{4n}^{4n}\left(x-\frac{1}{2}\right)^{(4n)}(\cos 2x+1).$$

Ta có: $\left(x-\frac{1}{2}\right)'=1$ nên $\left(x-\frac{1}{2}\right)^{(k)}=0$ với $k\geq 2$.

$$(\cos 2x+1)^{(4n)}=2^{4n}\cos\left(2x+4n\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\Rightarrow y^{(4n)}(x)=C_{4n}^{0}\left(x-\frac{1}{2}\right)(\cos 2x+1)^{(4n)}+C_{4n}^{1}(\cos 2x+1)^{(4n-1)}$$

$$=\mathbf{\left(x-\frac{1}{2}\right).2^{4n}\cos[2(x+n\pi)]+C_{4n}^{1}.2^{4n-1}\cos\left[2x+(4n-1)\frac{\pi}{2}\right].}$$

Câu 3:

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(1) \Rightarrow$ f(x)liên tục tại $x = 0$.

Xét $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - 1}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2} = 0$

$\Rightarrow$ f(x)khả vi tại $x = 0$.

Vậy f(x) liên tục và khả vi tại x = 0.

Câu 4:

Đặt $x = 2\sin u \Rightarrow dx = 2\cos u du$.

$$\Rightarrow I = 16\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 u.\cos u du = 16\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 u.\cos^2 u du = 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 2u du$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1-\cos 4u)du = 2\left(u - \frac{\sin 4u}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \mathbf{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}.$$

Câu 5:

Xét $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A \dfrac{\ln(1+2x)}{x^2}dx$, ta có:

Đặt $\begin{cases} u = \ln(1+2x) \\ dv = \frac{1}{x^2}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{1+2x}dx \\ v = -\frac{1}{x} \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\ln(1+2x)}{x^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\left[\left(-\frac{\ln(1+2x)}{x}\right)\Big|_1^A + 2\int_1^A \frac{dx}{x(1+2x)}\right]$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[\ln 3 - \frac{\ln(1+2A)}{A} + 2\int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{1+2x}\right)dx\right]$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[\ln 3 - \frac{\ln(1+2A)}{A} + 2\left(\ln\frac{x}{1+2x}\right)\Big|_1^A\right]$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[\ln 3 - \frac{\ln(1+2A)}{A} + 2\ln\frac{A}{1+2A} - 2\ln\frac{1}{3}\right]$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[3\ln 3 - \frac{\ln(1+2A)}{A} + 2\ln\frac{1}{\frac{1}{2A}+2}\right].$$

Mà ta lại có : $\lim_{A\to+\infty}\frac{\ln(1+2A)}{A} = \lim_{A\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+2A}}{1} = 0$ nên:

$$\lim_{A\to+\infty}\left[3\ln 3 - \frac{\ln(1+2A)}{A} + 2\ln\frac{1}{\frac{1}{2A}+2}\right] = 3\ln 3 - 2\ln 2\,.$$

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ và có giá trị tích phân **$I = 3\ln 3 - 2\ln 2$**.

Câu 6:

Đặt $a_n = \frac{1}{n}$ và $X = \frac{2x+1}{x-1}$.

Xét $\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = 1 \Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 1.$

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-1;1)$.

Khi $X = -1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Khi $X = 1$ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $[-1,1)$

$$\Rightarrow -1 \le \frac{2x+1}{x-1} < 1 \Leftrightarrow -2 < x \le 0$$

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là (-2;0].

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ I**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2013-2014**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: ***90 phút***

Câu 1:

1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[2\cos\left(\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}{2}\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[2\cos\left(\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)\right]$$

Vì $0\le\left|\cos\left(\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\right)\right|\le 1$ nên:

$$0\le\left|2\cos\left(\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)\right|\le 2\left|\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)\right|$$

Mà $\lim_{x\to\infty}\left|2\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)\right|=0$ nên:

$$\lim_{x\to\infty}\left|2\cos\left(\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)\right|=0.$$

Tức là $\lim_{x\to\infty}\left[2\cos\left(\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\right)\sin\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)\right]=0.$

Vậy $\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right)=0$.

2.

$\lim_{x\to0}\left(x.\left[\frac{x+1}{x}\right]\right)=\lim_{x\to0}\left[x.\left(\frac{x+1}{x}-n\right)\right]$ với $n=\frac{x+1}{x}-\left[\frac{x+1}{x}\right]$ là phần dư $(0\le n<1)$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(x.\left[\dfrac{x+1}{x}\right]\right)=\lim\limits_{x\to 0}(x+1-n.x)=0+1-0=\mathbf{1}.$

Câu 2:

1.

Với $|x|<1$ thì $f(x)=x$ nên $f'(x)=1.$

Với $|x|>1$ thì $f(x)=0$ nên $f'(x)=0.$

Với $x=1$, ta có: $f'(1^+)=0\neq f'(1^-)=1$ nên $\nexists f'(1).$

Với $x=-1$, ta có: $f'((-1)^+)=1\neq f'((-1)^-)=0$ nên $\nexists f'(-1).$

$$\mathbf{Vậy\ f'(x)=}\begin{cases}\mathbf{1} & \mathbf{nếu\ |x|<1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{nếu\ |x|>1}\end{cases}$$

2.

Với $x\neq 0$, ta có: $f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}\Rightarrow f'(x)=2x.\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}.$

Với $x=0$, ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\left(x.\sin\dfrac{1}{x}\right).$

Ta có: $-x\leq x.\sin\dfrac{1}{x}\leq x\ do\ -1\leq\sin\dfrac{1}{x}\leq 1.$

Mà $\lim\limits_{x\to 0}(-x)=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x.\sin\frac{1}{x}\right)=0\Rightarrow f'(0)=0.$

$$\Rightarrow\mathbf{f'(x)=}\begin{cases}\mathbf{2x.\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}} & \mathbf{nếu\ x\neq 0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{nếu\ x=0}\end{cases}$$

Xét $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(2x.\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$, ta có:

Chọn $x=\dfrac{1}{k2\pi}\to 0\Rightarrow k\to\infty.$ Khi đó:

$$\lim_{x\to 0}\left(2x.\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k\pi}-1\right)=-1\neq f'(0)=0.$$

$\Rightarrow$ **f(x)có đạo hàm gián đoạn tại x = 0.**

Câu 3:

1.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(2x^2+1)(2x^2+3)} = \frac{1}{2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+1} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+3} \right) = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$$

Đặt $x = \frac{\sqrt{2}}{2}\text{tgu} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{2}}{2\cos^2 u}du.$

$$\Rightarrow I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\sqrt{2}}{2}u\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Đặt $x = \frac{\sqrt{6}}{2}\text{tgu} \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{6}}{2\cos^2 u}du.$

$$\Rightarrow I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2+3} = \frac{\sqrt{6}}{6}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\sqrt{6}}{6}u\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\sqrt{6}}{6}.$$

Vậy $I = \frac{1}{2}(I_1 - I_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi\sqrt{6}}{6}\right) = \mathbf{\frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{12}\pi}.$

2.

Đặt $a_n = \frac{1}{3^n + 4^n}$ và $X = x - 1.$

Xét $\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n + 4^n}{3^{n+1} + 4^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{3.\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4} = \frac{1}{4}.$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 4.$

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-4; 4)$.

Khi $X = -4$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}$ phân kỳ do $\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} \to 1$ khi $n \to \infty$.

Khi $X = 4$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{3^n + 4^n}$ phân kỳ do $\frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1} \to 1$ khi $n \to \infty$.

$\Rightarrow -4 < x - 1 < 4 \Leftrightarrow -3 < x < 5$

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là (-3;5).

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ II**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2013-2014**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: ***90 phút***

Câu 1.

Áp dụng quy tắc L'Hospital 2 lần, ta có:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{3x+x^2} - 1 - \ln(1+3x)}{\tan(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{(3+2x)e^{3x+x^2} - \frac{3}{1+3x}}{\frac{2x}{\cos^2(x^2)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2e^{3x+x^2} + (3+2x)^2 e^{3x+x^2} + \frac{9}{(1+3x)^2}}{\frac{2\cos^2(x^2) + 8x^2\cos(x^2).\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}} = \mathbf{10}.$$

Câu 2.

Ta có: $y(x) = \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

$$\Rightarrow y^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^{(n)} = -\frac{1}{2}\cos^{(n)}(2x) \text{ với } n \geq 1$$

$$\Leftrightarrow y^{(n)}(x) = -2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow \mathbf{y^{(2014)}(\pi) = 2^{2013}}$.

Câu 3.

$$f(x) = \begin{cases} x^2\cos\frac{1}{x}, & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 \quad , & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

- Xét tính liên tục tại x = 0:

Ta có: $-x^2 \leq x^2\cos\frac{1}{x} \leq x^2$ do $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2) = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$.

$\Rightarrow$ f(x) liên tục tại x = 0.

- Xét tính khả vi tại x = 0:

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - (f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right)$.

Mặt khác, ta có: $-x \leq x\cos\frac{1}{x} \leq x$ do $-1 \leq \cos\frac{1}{x} \leq 1$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}(-x) = \lim\limits_{x\to 0}(x) = 0$ nên $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right) = 0$.

$\Rightarrow$ f(x) khả vi tại x = 0.

Vậy f(x) liên tục và khả vi tại x = 0 .

Câu 4.

$$I = \int_0^2 \frac{4x^2 + x + 7}{(x+1)(x^2+4)}dx = 2\int_0^2 \frac{dx}{x+1} + \int_0^2 \frac{2xdx}{x^2+4} - \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4}$$

$$I = 2\int_0^2 \frac{dx}{x+1} + \int_0^2 \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - \int_0^2 \frac{dx}{x^2+4} = \left(2\ln(x+1) + \ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x}{2}\right)\Big|_0^2$$

$I = 2\ln 3 + \ln 2 - \frac{\pi}{8}$.

Câu 5.

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{(2x+1)^3}\,dx$$

Xét $\lim\limits_{A\to\infty} \int_1^A \frac{\ln x}{(2x+1)^3}\,dx$, ta có:

Đặt $\begin{cases} u = \ln x \\ dv = \dfrac{dx}{(2x+1)^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{x} \\ v = -\dfrac{1}{4(2x+1)^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_1^A \frac{\ln x}{(2x+1)^3}\,dx = -\frac{\ln x}{4(2x+1)^2}\Big|_1^A + \frac{1}{4}\int_1^A \frac{dx}{x.(2x+1)^2}$$

$$= \frac{\ln A}{4(2A+1)^2} + \frac{1}{4}\int_1^A \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2}\right)dx$$

$$= \frac{\ln A}{4(2A+1)^2} + \frac{1}{4}\left(\ln x - \ln(2x+1) + \frac{1}{2x+1}\right)\Big|_1^A$$

$$= \frac{\ln A}{4(2A+1)^2} + \frac{1}{4}\left(\ln\frac{x}{2x+1} + \frac{1}{2x+1}\right)\Big|_1^A$$

$$= \frac{\ln A}{4(2A+1)^2} + \frac{1}{4}\left(\ln\frac{A}{2A+1} + \frac{1}{2A+1} - \ln\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to\infty} \int_1^A \frac{\ln x}{(2x+1)^3}\,dx = \lim_{A\to\infty}\left[\frac{\ln A}{4(2A+1)^2} + \frac{1}{4}\left(\ln\frac{x}{2x+1} + \frac{1}{2x+1} + \ln 3 - \frac{1}{3}\right)\right]$$

$$= 0 + \frac{1}{4}\left(-\ln 2 + 0 + \ln 3 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{12}.$$

Do $\lim\limits_{A\to\infty} \dfrac{\ln A}{4(2A+1)^2} = \lim\limits_{A\to\infty} \dfrac{\frac{1}{A}}{16(2A+1)} = \lim\limits_{A\to\infty} \dfrac{1}{16A(2A+1)} = 0$

Và $\lim\limits_{A\to\infty}\left(\ln\dfrac{x}{2x+1} + \dfrac{1}{2x+1}\right) = \lim\limits_{A\to\infty}\left(\ln\dfrac{1}{2+\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{2x+1}\right) = \ln\dfrac{1}{2} = -\ln 2$.

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ và có giá trị tích phân $I = \frac{1}{4}\ln\frac{3}{2} - \frac{1}{12}$.

Câu 6.

Đặt $a_n = \frac{1}{3^n(n^2 + 1)}$ và $X = x - 1$.

Xét $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n(n^2 + 1)}{3^{n+1}[(n+1)^2 + 1]} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1 + \frac{1}{n^2}}{3.\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}\right]} = \frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 3$.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-3; 3)$.

Khi $X = -3$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{n^2+1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Khi $X = 3$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1} \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ nên hội tụ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $[-3; 3]$.

$\Rightarrow -3 \le x - 1 \le 3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 4$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là [-2;4].

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ I**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2014-2015**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: ***90 phút***

Câu 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x}}{\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x.\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x.\ln(1+x^3)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}.\frac{\sin x}{x}.\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\cos x.\frac{\ln(1+x^3)}{x^3}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

Câu 2.

$$\int_0^1\frac{3^x}{3^{2x}+4.3^x+3}dx=\frac{1}{\ln 3}\int_0^1\frac{d(3^x+1)}{(3^x+1)(3^x+3)}=\frac{1}{2\ln 3}\int_0^1\left(\frac{1}{3^x+1}-\frac{1}{3^x+3}\right)d(3^x+1)$$

$$=\frac{1}{2\ln 3}[\ln(3^x+1)-\ln(3^x+3)]\Big|_0^1=\mathbf{\frac{\ln 2}{\ln 3}-\frac{1}{2}}.$$

Câu 3. $f(x)=\begin{cases}-x^2+a;\ x\geq 5\\ x^2+bx;\ x<5\end{cases}$

Để f(x) có đạo hàm tại x = 5 thì f(x) phải liên tục và khả vi tại x = 5:

- f(x) liên tục tại x = 5 khi và chỉ khi:

  $\lim_{x\to 5^-}f(x)=\lim_{x\to 5^+}f(x)=f(5)\Leftrightarrow\lim_{x\to 5^-}(-x^2+a)=\lim_{x\to 5^+}(x^2+bx)=-25+a$

  $\Leftrightarrow -25+a=25+5b\Leftrightarrow a-5b=50\ (1)$

- Ta có: $f'(x)=\begin{cases}-2x; & x>5\\ 2x+b; & x<5\end{cases}$

f(x) khả vi tại x = 5 khi và chỉ khi:

$f'(5^-)=f'(5^+)\Leftrightarrow 2.5+b=-2.5\Leftrightarrow b=-20\ (2)$

Từ (1) và (2) ⇒ **Hàm số đã cho có đạo hàm tại x = 5 khi a = -50, b = -20.**

Câu 4.

Đặt $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n.5^n}$ và $X = x - 10$.

Xét $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n.5^n}{(n+1).5^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{5(1+\frac{1}{n})} = \frac{1}{5}$.

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 5$.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-5;5)$.

Khi $X = -5$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n-1}.\frac{1}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Khi $X = 5$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n-1}.\frac{1}{n}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $[-5;5]$.

$\Rightarrow -5 \le x - 10 \le 5 \Leftrightarrow 5 \le x \le 15$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là **[5;15]**.

Câu 5.

Ta có: Do $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $0 < \sin^2 x < 1 \Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{5+3\sin^2 x} < \frac{1}{5}$.

$\Rightarrow \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{8}dx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\sin^2 x}dx < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5}dx \Leftrightarrow \mathbf{\frac{\pi}{16} < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{5+3\sin^2 x}dx < \frac{\pi}{10}}$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ II**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2014-2015**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: ***90 phút***

Câu 1.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left[\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right]$

$=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\pi\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\left(\pi\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}+1}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\mathbf{1}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}.\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}.\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)$.

Do $-1\le\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\le 1$ nên:

$-2\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\le 2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}.\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\le 2\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}$

Mà $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2.\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2.\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)=0$ nên:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}.\sin\dfrac{1}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\right)=0$.

Vậy $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)=0$.

Câu 2.

1.

Ta có: $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2x} - n^{-2x}}{n^{2x} + n^{-2x}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{2x} - \dfrac{1}{n^{2x}}}{n^{2x} + \dfrac{1}{n^{2x}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{4x} - 1}{n^{4x} + 1}.$

Với $x < 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} n^{4x} = 0$ nên $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{4x} - 1}{n^{4x} + 1} = -1.$

Với $x = 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{4x} - 1}{n^{4x} + 1} = \dfrac{1 - 1}{1 + 1} = 0.$

Với $x > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{4x} - 1}{n^{4x} + 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - \dfrac{1}{n^{4x}}}{1 + \dfrac{1}{n^{4x}}} = 1.$

$$\Rightarrow f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 \text{ nếu } x < 0 \\ 0 \text{ nếu } x = 0 \\ 1 \text{ nếu } x > 0 \end{cases}$$

Vậy f(x) gián đoạn tại x = 0 và liên tục trong khoảng $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

2.

$$y = \ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}.$$

Ta có: Chứng minh: $y^{(n)} = (n-1)!.\left((-1)^{n-1}.\dfrac{1}{(1+x)^n} + \dfrac{1}{(1-x)^n}\right)$ (1)

(1) luôn đúng với n = 1.

Giả sử (1) đúng với n = k, tức là:

$$y^{(k)} = (k-1)!.\left((-1)^{k-1}.\frac{1}{(1+x)^k} + \frac{1}{(1-x)^k}\right)$$

Khi đó ta cần chứng minh (1) đúng với n = k+1. Thật vậy, ta có:

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = (k-1)!.\left((-1)^{k-1}.\left[\frac{1}{(1+x)^k}\right]' + \left[\frac{1}{(1-x)^k}\right]'\right)$$

$$= (k-1)!.\left((-1)^{k-1}.\frac{-k}{(1+x)^{k-2}} + \frac{k}{(1+x)^{k-2}}\right) = k!.\left((-1)^k.\frac{1}{(1+x)^{k+1}} + \frac{1}{(1+x)^{k+1}}\right)$$

$\Rightarrow$ đcpcm.

Vậy $\mathbf{y^{(n)} = (n-1)!.\left((-1)^{n-1}.\frac{1}{(1+x)^n} + \frac{1}{(1-x)^n}\right).}$

Câu 3.

1.

Đặt $u = \sqrt{1+\sin^2 x} \Rightarrow du = \frac{\sin x \cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$ và $\sin^2 x = u^2 - 1$.

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x\sqrt{1+\sin^2 x}} = \int \frac{\sin x \cos x dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\sin^2 x}} = \int \frac{\sin x \cos x dx}{(1-\sin^2 x)\sqrt{1+\sin^2 x}}$$

$$= \int \frac{du}{2-u^2} = \frac{\sqrt{2}}{4}\int \left(\frac{1}{\sqrt{2}-u} + \frac{1}{\sqrt{2}+u}\right) du = \mathbf{\frac{\sqrt{2}}{4} \ln \frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u} + C.}$$

2.

Đặt $u = \sqrt{1-x} \Rightarrow du = -\frac{dx}{2\sqrt{1-x}}$ và $x = 1 - u^2$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -\int_1^0 \frac{2du}{1+u^2} = -2\text{arctg}u\Big|_1^0 = \mathbf{\frac{\pi}{2}}.$$

Câu 4.

Đặt $a_n = \frac{1}{3^n + 5^n}$ và $X = (x-1)^2$.

Xét $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n+5^n}{3^{n+1}+5^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}{3.\left(\frac{3}{5}\right)^n + 5} = \frac{1}{5}$.

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 5$.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-5;5)$.

Khi $X = -5$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}$ phân kỳ do $\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} \to 1$ khi $n \to \infty$.

Khi $X = 5$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1}$ phân kỳ do $\frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1} \to 1$ khi $n \to \infty$.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-5; 5)$.

$\Rightarrow -5 < (x-1)^2 < 5 \Leftrightarrow -\sqrt{5} + 1 < x < \sqrt{5} + 1$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $(-\sqrt{5} + 1; \sqrt{5} + 1)$.

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ I**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2015-2016**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: ***90 phút***

Câu 1.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{1+\tan^2 x} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [1 + (\sin x - 1)]^{\frac{1}{\sin x - 1} \cdot [(1+\tan^2 x)(\sin x - 1)]}$$

$$= e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [(1+\tan^2 x)(\sin x - 1)]} = e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}} = e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{1 - \sin^2 x}}$$

$$= e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{(1+\sin x)(1-\sin x)}} = e^{\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-1}{1+\sin x}} = \mathbf{e^{-\frac{1}{2}}}.$$

Câu 2.

Áp dụng công thức Leibnitz, ta có:

$$y^{(20)}(x) = \sum_{k=0}^{20} \left[C_{20}^k (x^2)^{(k)} (\cos(2x))^{(20-k)}\right] = C_{20}^0 x^2 (\cos(2x))^{(20)} + C_{20}^1 (x^2)^{(1)} (\cos(2x))^{(19)}$$

$$+ C_{20}^2 (x^2)^{(2)} (\cos(2x))^{(18)} + \cdots + C_{20}^{20} (x^2)^{(20)} \cos(2x).$$

Ta lại có: $(x^2)' = 2x, (x^2)^{(2)} = 2, (x^2)^{(n)} = 0$ với $n \geq 3$.

$(\cos(2x))^{(n)} = 2^n.\cos\left(2x + n.\frac{\pi}{2}\right).$

$\Rightarrow y^{(20)}(x) = C_{20}^0.x^2\left(\cos(2x)\right)^{(20)} + C_{20}^1.(x^2)^{(1)}\left(\cos(2x)\right)^{(19)} + C_{20}^2.(x^2)^{(2)}\left(\cos(2x)\right)^{(18)}$

$= C_{20}^0.x^2.2^{20}.\cos\left(2x + 20.\frac{\pi}{2}\right) + C_{20}^1.2x.2^{19}.\cos\left(2x + 19.\frac{\pi}{2}\right)$

$+C_{20}^2.2.2^{18}.\cos\left(2x + 18.\frac{\pi}{2}\right)$

$= 2^{20}.x^2\cos(2x) + 20.2^{20}.x\sin(2x) - 95.2^{20}.\cos(2x)$

$= 2^{20}.[x^2\cos(2x) + 20x\sin(2x) - 95\cos(2x)].$

$\Rightarrow y^{(20)}(\pi) = 2^{20}.[\pi^2.\cos(2\pi) + 20\pi\sin(2\pi) - 95\cos(2\pi)] = \mathbf{2^{20}.(\pi^2 - 95)}.$

Câu 3.

$$f(x) = \begin{cases}(x-1)(x+1)^2 & \text{nếu } x \geq 1\\ (1-x)(x+1)^2 & \text{nếu } x < 1\end{cases}$$

Xét $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(1-x)(x+1)^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}[-(x+1)^2] = -4.$

$\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}[(x+1)^2] = 4 \neq \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -4.$

⇒ f(x) không khả vi tại x = 1.

Xét $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{(1-x)(x+1)^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to(-1)^-}[-(x+1)^2] = -4.$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x\to(-1)^+}[-(x+1)^2] = -4 = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}.$

⇒ f(x) khả vi tại x = -1.

Vậy f(x) không khả vi tại x = 1 nhưng khả vi tại x = -1.

Câu 4.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\sqrt{\sin^2 x + 4\cos^2 x}\,dx$$

Đặt $u = \sin^2 x + 4\cos^2 x \Rightarrow du = -6\sin x\cos x dx = -3\sin(2x)dx.$

$\Rightarrow I = -\frac{1}{3}\int_4^1 \sqrt{u}\,du = -\frac{2}{9}.u^{\frac{3}{2}}\Big|_4^1 = \mathbf{\frac{14}{9}}$.

Câu 5.

Xét $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{x}{(x+1)(2x+1)^2}dx$, ta có:

$$\int_0^A \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)^2} = \int_0^A \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)^2} = \int_0^A \left(-\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{(2x+1)^2}\right)dx$$

$$= \left[-\ln(x+1)+\ln(2x+1)+\frac{1}{2(2x+1)}\right]\Big|_0^A = \ln\frac{2A+1}{A+1}+\frac{1}{2(2A+1)}-\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to+\infty}\int_0^A \frac{x}{(x+1)(2x+1)^2}dx = \lim_{A\to+\infty}\left[\ln\frac{2A+1}{A+1}+\frac{1}{2(2A+1)}-\frac{1}{2}\right]$$

$$= \lim_{A\to+\infty}\left[\ln\frac{2+\frac{1}{A}}{1+\frac{1}{A}}+\frac{1}{2(2A+1)}-\frac{1}{2}\right] = \ln2-\frac{1}{2}.$$

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ và $I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(x+1)(2x+1)^2}dx = \ln2-\frac{1}{2}$.

Câu 6.

Đặt $a_n = \frac{1}{2^n.(3n^2+1)}$ và $X = x-1$.

Xét $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^n.(3n^2+1)}{2^{n+1}.[3(n+1)^2+1]} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{3n^2}}{2.\left[(1+\frac{1}{n})^2+\frac{1}{3n^2}\right]} = \frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 2$.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-2;2)$.

Khi $X = -2$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{3n^2+1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Khi $X = 2$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3n^2+1} \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ nên hội tụ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_nX^n$ là $[-2;2]$.

$\Rightarrow -2 \le x-1 \le 2 \Leftrightarrow -1 \le x \le 3$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là [-1;3].

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ II**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2015-2016**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: ***90 phút***

Câu 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{(x+3).\frac{2x-1}{x+3}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+3}} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}} = \mathbf{e^2}.$$

Câu 2.

Áp dụng công thức Leibnitz, ta có:

$$y^{(25)}(x) = \sum_{k=0}^{25}\left[C_{25}^k(x^2+x+1)^{(k)}(e^{2x})^{(25-k)}\right] = C_{25}^0(x^2+x+1)(e^{2x})^{(25)}$$

$$+C_{25}^1(x^2+x+1)^{(1)}(e^{2x})^{(24)} + C_{25}^2(x^2+x+1)^{(2)}(e^{2x})^{(23)} + \cdots +$$

$$+ C_{25}^{25}(x^2+x+1)^{(25)}.e^{2x}.$$

Ta lại có: $(x^2+x+1)' = 2x+1, (x^2+x+1)^{(2)} = 2, (x^2+x+1)^{(n)} = 0$ với $n \ge 3$.

$(e^{2x})^{(n)} = 2^n.e^{2x}$.

$\Rightarrow y^{(25)}(x) = C_{25}^{0}(x^2+x+1)(e^{2x})^{(25)} + C_{25}^{1}(x^2+x+1)^{(1)}(e^{2x})^{(24)} +$

$+C_{25}^{2}(x^2+x+1)^{(2)}(e^{2x})^{(23)} = (x^2+x+1).2^{25}.e^{2x} + 25.(2x+1).2^{24}.e^{2x} +$

$+ 300.2.2^{23}.e^{2x} = 2^{24}.(2x^2+52x+327)e^{2x}.$

$\Rightarrow \mathbf{y^{(25)}(0) = 327.2^{24}}$.

Câu 3.

Áp dụng khai triển Maclaurin hàm cơ bản ln(1+u) với $u = 2x + 3x^2$, ta có:

$$f(x) = \ln(1+2x+3x^2) = (2x+3x^2) - \frac{(2x+3x^2)^2}{2} + o[(2x+3x^2)^2]$$

$$= 2x + 3x^2 - 2x^2 + o(x^2) = \mathbf{2x + x^2 + o(x^2)}\ .$$

Câu 4.

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x + \sin x \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 1 + \cos x \\ v = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x+\sin x}{\cos^2 x}\,dx = [(x+\sin x).\tan x]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x.(1+\cos x)}{\cos x}\,dx$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos x} + 1\right) d(\cos x) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2} + [\ln(\cos x) + \cos x]\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{2} - \ln 2 - \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{\pi\sqrt{3}}{3} + 1 - \ln 2}\ .$$

Câu 5.

Xét $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_1^A \dfrac{dx}{(x^2+1)^2}$, ta có:

Đặt $x = \text{tg}u \Rightarrow dx = \dfrac{du}{\cos^2 u}$.

$$\Rightarrow \int_{\frac{\pi}{4}}^{\text{arctg}A} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\text{arctg}A} \cos^2 u\,du = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\text{arctg}A} (\cos 2u + 1)\,du$$

$$= \frac{1}{4}(\sin 2u + 2u)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\text{arctgA}} = \frac{1}{4}\left(\sin(2\text{arctgu}) + 2\text{arctgu} - 1 - \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{1}{4}\left(\sin(2\text{arctgu}) + 2\text{arctgu} - 1 - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\sin(\pi) + \pi - 1 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{8}(\pi - 2).$$

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ và $\mathbf{I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{8}(\pi - 2)}$.

Câu 6.

Đặt $a_n = \frac{1}{5^n.\sqrt{3n+1}}$ và $X = \sqrt{2x+1}$.

Xét $\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{5^n.\sqrt{3n+1}}{5^{n+1}.\sqrt{3(n+1)+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{3n}}}{5.\sqrt{1+\frac{1}{4n}}} = \frac{1}{5}.$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 5.$

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-5;5)$.

Khi $X = -5$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Khi $X = 5$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ nên phân kỳ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $[-5;5)$.

$\Rightarrow -5 \le \sqrt{2x+1} < 5 \Leftrightarrow -3 \le x < 2$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là [-3;2).

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ I**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2016-2017**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: ***90 phút***

Câu 1.

Áp dụng quy tắc L'Hospital 2 lần, ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+x+\sin x}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{2}{1-2x}+1+\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{4}{(1-2x)^2}-\sin x}{\cos x}=-4.$$

Câu 2.

Áp dụng công thức Leibnitz, ta có:

$$y^{(2016)}(x)=\sum_{k=0}^{2016}\left[C_{2016}^{k}(x^3-2x+5)^{(k)}(\cos(3x))^{(2016-k)}\right]$$

$$=C_{2016}^{0}(x^3-2x+5).(\cos(3x))^{(2016)}+C_{2016}^{1}(x^3-2x+5)^{(1)}.(\cos(3x))^{(2015)}$$

$$+C_{2016}^{2}(x^3-2x+5)^{(2)}.(\cos(3x))^{(2014)}+C_{2016}^{3}(x^3-2x+5)^{(3)}.(\cos(3x))^{(2013)}$$

$$+C_{2016}^{2016}(x^3-2x+5)^{(2016)}.\cos(3x).$$

Ta lại có: $(x^3-2x+5)'=3x^2-2,(x^3-2x+5)^{(2)}=6x,$

$(x^3-2x+5)^{(3)}=6,(x^3-2x+5)^{(n)}=0$ với $n\geq 4.$

$$(\cos(3x))^{(n)}=3^n.\cos\left(3x+n.\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\Rightarrow y^{(2016)}(x)=C_{2016}^{0}(x^3-2x+5).(\cos(3x))^{(2016)}+C_{2016}^{1}(x^3-2x+5)^{(1)}.(\cos(3x))^{(2015)}$$

$$+C_{2016}^{2}(x^3-2x+5)^{(2)}.(\cos(3x))^{(2014)}+C_{2016}^{3}(x^3-2x+5)^{(3)}.(\cos(3x))^{(2013)}$$

$$=C_{2016}^{0}(x^3-2x+5).3^{2016}.\cos\left(3x+2016.\frac{\pi}{2}\right)+C_{2016}^{1}(3x^2-2).3^{2015}.\cos\left(3x+2015.\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+C_{2016}^{2}.6x.3^{2014}.\cos\left(3x+2014.\frac{\pi}{2}\right)+C_{2016}^{3}.6.3^{2013}.\cos\left(3x+2013.\frac{\pi}{2}\right)$$

$= 3^{2016}(x^3 - 2x + 5)\cos(3x) + 3^{2016}.C_{2016}^{1}(3x^2 - 2)\sin(3x) +$

$- 2.3^{2015}.C_{2016}^{2}.x.\cos(3x) - 2.3^{2014}.C_{2016}^{3}.\sin(3x).$

$\Rightarrow y^{(20)}(\pi) = 3^{2016}(\pi^3 - 2\pi + 5)\cos(3\pi) + 3^{2016}.C_{2016}^{1}(3\pi^2 - 2)\sin(3\pi) +$

$- 2.3^{2015}.C_{2016}^{2}.\pi.\cos(3\pi) - 2.3^{2014}.C_{2016}^{3}.\sin(3\pi) = \mathbf{3^{2016}.(-\pi^3 + 1354082\pi - 5)}$.

Câu 3.

- Xét tính liên tục tại x = 0:

  Ta có: $-x^2 \le x^2\cos\frac{1}{x} \le x^2$ và $\lim\limits_{x\to 0}(-x^2) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2) = 0$.

  $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x}\right) = 0$ (theo nguyên lý kẹp).

  $\Rightarrow$ **f(x) liên tục tại x = 0**.

- Xét tính khả vi tại x = 0:

  Ta có: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0}\left(x\cos\frac{1}{x}\right) = 0$ do:

  $-x \le x\cos\frac{1}{x} \le x$ và $\lim\limits_{x\to 0}(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x) = 0$ (theo nguyên lý kẹp).

  $\Rightarrow$ **f(x) khả vi tại x = 0**.

Câu 4.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}\sin 2x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x\cos x.e^{\sin^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin^2 x}d(\sin^2 x) = e^{\sin^2 x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{e - 1}.$$

Câu 5.

$$I = \int_1^{+\infty}\frac{\ln(2x+3)}{x^3}dx$$

Xét $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\ln(2x+3)}{x^3}dx$, ta có:

Đặt $\begin{cases} u = \ln(2x+3) \\ dv = \frac{1}{x^3}dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{2}{2x+3}dx \\ v = -\frac{1}{2x^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_1^A \frac{\ln(2x+3)}{x^3}dx = -\frac{\ln(2x+3)}{2x^2}\Big|_1^A + \int_1^A \frac{dx}{(2x+3).x^2}$$

$$= -\frac{\ln(2x+3)}{2x^2}\Big|_1^A + \int_1^A \frac{dx}{(2x+3).x^2} = \frac{\ln 5}{2} - \frac{\ln(2A+3)}{2A^2} + \frac{1}{9}\int_1^A \left(\frac{4}{2x+3} - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)dx$$

$$= \frac{\ln 5}{2} - \frac{\ln(2A+3)}{2A^2} + \frac{1}{9}\left[2\ln(2x+3) - 2\ln x - \frac{3}{x}\right]\Big|_1^A$$

$$= \frac{\ln 5}{2} - \frac{\ln(2A+3)}{2A^2} + \frac{1}{9}\left[2\ln\frac{2A+3}{A} - \frac{3}{A} - 2\ln 5 - 3\right]$$

$$= \frac{2}{9}\ln\frac{2A+3}{A} - \frac{\ln(2A+3)}{2A^2} + \frac{5}{18}\ln 5 - \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to+\infty}\int_1^A \frac{\ln(2x+3)}{x^3}dx = \lim_{A\to+\infty}\left[\frac{2}{9}\ln\frac{2A+3}{A} - \frac{\ln(2A+3)}{2A^2} + \frac{5}{18}\ln 5 - \frac{1}{3}\right]$$

$$= \frac{2}{9}\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{2A+3}{A} - \lim_{A\to+\infty}\frac{\ln(2A+3)}{2A^2} + \frac{5}{18}\ln 5 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{9}\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{2+\frac{3}{A}}{1} - \lim_{A\to+\infty}\frac{2}{2A^2.(2A+3)} + \frac{5}{18}\ln 5 - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}\ln 2 + \frac{5}{18}\ln 5 - \frac{1}{3}.$$

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ và $\mathbf{I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{x^3}dx = \frac{2}{9}\ln 2 + \frac{5}{18}\ln 5 - \frac{1}{3}}$.

Câu 6.

Đặt $a_n = \frac{1}{n+1}$ và $X = \frac{2x+1}{x-1}$.

Xét $\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$.

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 1$.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-1;1)$.

Khi $X = -1$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{n+1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Khi $X = 1$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1} \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ nên phân kỳ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}a_nX^n$ là $[-1;1)$.

$\Rightarrow -1 \le \frac{2x+1}{x-1} < 1 \Leftrightarrow -2 < x \le 0$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là (-2;0].

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ II**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2016-2017**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: **90 phút**

Câu 1.

Áp dụng quy tắc L'Hospital 3 lần, ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x(1-\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{1-\cos x + x\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\sin x + \sin x + x\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{2\cos x + \cos x - x\sin x} = \mathbf{-\frac{1}{3}}.$$

Chú ý: Có thể dùng khai triển Maclaurin.

Câu 2. (1,5đ). Cho hàm số $f(x) = |x-2|(x+2)^3$. Xét tính khả vi của hàm số tại các điểm $x = -2$ và $x = 2$.

$$f(x) = \begin{cases}(x-2)(x+2)^3 & \text{nếu } x \ge 2\\ (2-x)(x+2)^3 & \text{nếu } x < 2\end{cases}$$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(2-x)(x+2)^3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}[-(x+2)^3]=-64$.

$\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)(x+2)^3}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^-}[(x+2)^3]=64\neq\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=-64$.

$\Rightarrow$ f(x)không khả vi tại x = 2 .

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{(2-x)(x+2)^3}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^-}[(2-x)(x+2)^2]=0$.

$\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to(-2)^+}[(2-x)(x+2)^2]=0=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$.

$\Rightarrow$ f(x) khả vi tại x = −2 .

<u>Câu 3</u>.

Ta có: $f(x)=(3x^2+1)\sin^2x=\dfrac{1}{2}(3x^2+1)(1-\cos 2x)$.

Áp dụng công thức Leibnitz, ta có:

$$f^{(2017)}(x)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2017}\left[C_{2017}^{k}(3x^2+1)^{(k)}(1-\cos 2x)^{(2017-k)}\right]$$

$2f^{(2017)}(x)=C_{2017}^{0}(3x^2+1).(1-\cos 2x)^{(2017)}+C_{2017}^{1}(3x^2+1)^{(1)}.(1-\cos 2x)^{(2016)}$

$+C_{2017}^{2}(3x^2+1)^{(2)}.(1-\cos 2x)^{(2015)}+C_{2016}^{2016}(x^3-2x+5)^{(2016)}.(1-\cos 2x)$.

Ta lại có: $(3x^2+1)'=6x,(3x^2+1)^{(2)}=6,(3x^2+1)^{(n)}=0$ với $n\geq 3$.

$(1-\cos 2x)^{(n)}=-2^n.\cos\left(2x+n.\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow 2f^{(2017)}(x)=C_{2016}^{0}(3x^2+1).(1-\cos 2x)^{(2017)}+C_{2017}^{1}(3x^2+1)^{(1)}.(1-\cos 2x)^{(2016)}$

$+C_{2017}^{2}(3x^2+1)^{(2)}.(1-\cos 2x)^{(2015)}=C_{2017}^{0}(3x^2+1).\left(-2^{2017}.\cos(2x+2017.\dfrac{\pi}{2}\right)$

$+C_{2017}^{1}.6x.\left(-2^{2016}.\cos(2x+2016.\dfrac{\pi}{2}\right)+C_{2017}^{2}.6.\left(-2^{2015}.\cos(2x+2015.\dfrac{\pi}{2}\right)$

$=2^{2017}.(3x^2+1)\sin(2x)-2^{2016}.C_{2017}^{1}.6x\cos(2x)-3.2^{2016}.C_{2017}^{2}\sin(2x)$.

$=2^{2016}.\left[2.(3x^2+1)\sin(2x)-6.C_{2017}^{1}.x\cos(2x)-3.C_{2017}^{2}\sin(2x)\right]$.

$\Rightarrow 2f^{(2017)}(\pi) = 2^{2016}.\left[2.(3\pi^2+1)\sin(2\pi) - 6.C_{2017}^{1}.\pi\cos(2\pi) - 3.C_{2017}^{2}\sin(2\pi)\right].$

$\Rightarrow \mathbf{f^{(2017)}(\pi) = 6051.2^{2016}.\pi}$.

Câu 4.

Đặt $\begin{cases} u = x + \cos x \\ dv = \dfrac{dx}{\sin^2 x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = 1 - \sin x \\ v = -\cot gx = -\dfrac{\cos x}{\sin x} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\cos x}{\sin^2 x}dx = [-(x+\cos x).\cot gx]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x.(1-\sin x)}{\sin x}\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x} - 1\right) d(\sin x) = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + [\ln(\sin x) - \sin x]\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \mathbf{-\ln\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} - 1}\ .$$

Câu 5.

$$I = \int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)(x^2-1)}$$

Xét $\lim\limits_{A\to+\infty} \int_{3}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)(x^2-1)}$, ta có:

$$\int_{3}^{A} \frac{dx}{(x^2+3)(x^2-1)} = \frac{1}{8}\int_{3}^{A}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x^2+3}\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}\left[\ln(x-1) - \ln(x+1) + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{x}{\sqrt{3}}\right]\Big|_{3}^{A} = \frac{1}{8}\left[\ln\frac{A-1}{A+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{A}{\sqrt{3}} + \ln 2 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right].$$

$$\Rightarrow \lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)(x^2-1)} = \frac{1}{8}\lim_{A\to+\infty}\left[\ln\frac{A-1}{A+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{A}{\sqrt{3}} + \ln 2 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\lim_{A\to+\infty}\left[\ln\frac{1-\frac{1}{A}}{1+\frac{1}{A}} + \frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{A}{\sqrt{3}} + \ln 2 - \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right] = \frac{1}{72}\left(9\ln 2 - \pi\sqrt{3}\right).$$

Vậy tích phân suy rộng đã cho hội tụ và $\mathbf{I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+3)(x^2-1)} = \frac{1}{72}\left(9\ln 2 - \pi\sqrt{3}\right)}$.

Câu 6.

Đặt $a_n = \frac{1}{5^n.\sqrt{3n+1}}$ và $X = x - 1$.

Xét $\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{5^n.\sqrt{3n+1}}{5^{n+1}.\sqrt{3(n+1)+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{3n}}}{5.\sqrt{1+\frac{1}{4n}}} = \frac{1}{5}.$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 5.$

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-5;5)$.

Khi $X = -5$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Khi $X = 5$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{3n+1}} \sim \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ nên phân kỳ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $[-5;5)$.

$\Rightarrow -5 \le x - 1 < 5 \Leftrightarrow -4 \le x < 6$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là [-4;6).

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ I**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2017-2018**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: ***90 phút***

Câu 1.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt{n}-\sqrt{n+1}\right)+\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\right)}+\frac{1}{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)}\right]=\mathbf{0}\,.$$

Câu 2.

$$y(x)=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{1+x^{4n}}=\lim_{n\to+\infty}(1+x^{4n})^{\frac{1}{n}}$$

Với $|x|\le 1$ thì: $x^{4n}\to 0$ khi $n\to+\infty\Rightarrow y(x)=\lim_{n\to+\infty}(1+x^{4n})^{\frac{1}{n}}=1.$

Với $|x|>1$ *thì*: $x^{4n}\to+\infty$ khi $n\to+\infty\Rightarrow y(x)=\lim_{n\to+\infty}(1+x^{4n})^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}(x^{4n})^{\frac{1}{n}}=x^4.$

$$\Rightarrow y(x)=\begin{cases}1, \text{nếu } |x|\le 1\\ x^4, \text{nếu } |x|>1\end{cases}$$

Với $|x|<1$ *thì* $y(x)=1$ liên tục và $|x|>1$ *thì* $y(x)=x^4$ cũng liên tục. (1)

Ta có: $\lim_{x\to1^-}y(x)=\lim_{x\to1^-}(1)=1=y(1),\ \lim_{x\to1^+}y(x)=\lim_{x\to1^+}(x^4)=1=\lim_{x\to1^-}y(x)=y(1).$

$\Rightarrow y(x)$liên tục tại $x=1.$ (2)

$$\lim_{x\to(-1)^-}y(x)=\lim_{x\to(-1)^-}(x^4)=1,\ \lim_{x\to(-1)^+}y(x)=\lim_{x\to(-1)^+}(1)=1=y(1)=\lim_{x\to(-1)^-}y(x).$$

$\Rightarrow y(x)$liên tục tại $x=-1.$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra **y(x) liên tục trên R**.

Câu 3. Tính đạo hàm $y''(x)$ của hàm số

$$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=t-\cos t\end{cases}$$

Ta có: $\begin{cases}x'(t)=1-\cos t\\ y'(t)=1-\sin t\end{cases}\Rightarrow y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{1-\sin t}{1-\cos t}\Rightarrow y''(x)=\left(\frac{1-\sin t}{1-\cos t}\right)'$

$$y''(x)=\frac{-\cos t.(1-\cos t)-(1-\sin t).\sin t}{(1-\cos t)^2}=\frac{\mathbf{1-\sin t-\cos t}}{\mathbf{(1-\cos t)^2}}\,.$$

Câu 4. Tính tích phân

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{2x^6 + 2x^3 + 1}}$$

Indefinite integral:

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x^6 + 2x^3 + 1}}\,dx = \frac{x^2\sqrt{1+(1-i)x^3}\,\sqrt{1+(1+i)x^3}\,F_1\left(\frac{2}{3};\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{5}{3};(-1+i)x^3,(-1-i)x^3\right)}{2\sqrt{2x^6+2x^3+1}} + \text{constant}$$

$F_1(a; b_1, b_2; c; x, y)$ is the Appell hypergeometric function of two variables

Câu này mình dùng phần mềm trên mạng nó ra kết quả như trên nên mình nghĩ không thể nào tính được tích phân, chắc do đề sai!!!

Câu 5.

Đặt $a_n = \frac{n}{n+1}$ và $X = \frac{x-1}{2}$.

Xét $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1).(n+1)}{n.(n+2)} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} = 1.$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 1.$

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-1;1)$.

Khi $X = -1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{n}{n+1}$ phân kỳ do $\frac{n}{n+1} \to 1$ khi $n \to \infty$.

Khi $X = 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}$ phân kỳ do $\frac{n}{n+1} \to 1$ khi $n \to \infty$.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-1;1)$.

$\Rightarrow -1 < \frac{x-1}{2} < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 3.$

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là (-1;3).

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI **ĐỀ THI KẾT THÚC HỌC KỲ II**

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN **NĂM HỌC 2017-2018**

Môn thi: Giải tích 1

Mã môn học: **MAT1091** Số tín chỉ: 03 Đề số: 01

Dành cho sinh viên lớp môn học: MAT1091. Thời gian làm bài: ***90 phút***

Câu 1.

a, Áp dụng quy tắc L'Hospital 2 lần, ta có:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos(2x)}=\frac{1}{2}.$$

b,

$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}=\lim_{x\to 1}[1+(1-x)]^{\frac{1}{1-x}.\left[(1-x).\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x).\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x).\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x).\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[(1-x).\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)}\right]}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\left[\frac{2}{\pi}.\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(1-x)\right]}{\frac{\pi}{2}(1-x)}}\right]}=e^{\frac{2}{\pi}}.$$

Câu 2.

$$f(x)=\begin{cases}|x^2-5|, & \text{khi } x\geq 2\\ ax^2+bx, & \text{khi } x<2\end{cases}=\begin{cases}x^2-5, & \text{với mọi } x\geq\sqrt{5}\\ 5-x^2, & \text{với mọi } 2\leq x<\sqrt{5}\\ ax^2+bx, & \text{với mọi } x<2\end{cases}$$

- f(x) liên tục tại x = 2 khi và chỉ khi:

  $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to 2^-}(ax^2+bx)=\lim\limits_{x\to 2^+}(5-x^2)=1$

  $\Leftrightarrow 4a+2b=1\ (1)$

- Ta có: $f'(x) = \begin{cases} 2x, \text{ với mọi } x > \sqrt{5} \\ -2x, \text{với mọi } 2 < x < \sqrt{5} \\ 2ax + b, \text{với mọi } x < 2 \end{cases}$

f(x) khả vi tại x = 2 khi và chỉ khi:

$f'(2^-) = f'(2^+) \Leftrightarrow 2a.2 + b = -2.2 \Leftrightarrow 4a + b = -4\ (2)$

Từ (1) và (2) ⇒ **Hàm số đã cho liên tục và khả vi tại x = 2 khi a = $-\frac{9}{4}$, b = 5 (*)**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{với mọi } x > \sqrt{5} \\ -2x, & \text{với mọi } 2 < x < \sqrt{5} \\ -\frac{9}{2}x + 5, & \text{với mọi } x < 2 \end{cases} (**)$$

Ta có: $f'\left(\left(\sqrt{5}\right)^-\right) = 5 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 0.$

Mà $f'\left(\left(\sqrt{5}\right)^+\right) = \left(\sqrt{5}\right)^2 - 5 = 0 = f'\left(\left(\sqrt{5}\right)^-\right).$

⇒ f(x)khả vi tại $x = \sqrt{5}$ (***)

Từ (*), (**) và (***) suy ra **Với a = $-\frac{9}{4}$, b = 5f(x) khả vi trên toàn trục số R:**

$$\mathbf{f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{với mọi } x > \sqrt{5} \\ -2x, & \text{với mọi } 2 < x < \sqrt{5} \\ -\frac{9}{2}x + 5, & \text{với mọi } x < 2 \\ 0, & \text{với mọi } x = \sqrt{5} \\ -4, & \text{với mọi } x = 2 \end{cases}}$$

<u>Câu 3</u>. Hãy sử dụng khai triển Maclaurin để tìm $g^{(2016)}(0)$ của hàm số sau

$$g(x) = (1 + x^3)e^{x^3}$$

Áp dụng công thức Leibnitz, ta có:

$$g^{(2016)}(x) = \sum_{k=0}^{2016} \left[C_{2016}^k (1 + x^3)^{(k)} \left(e^{x^3}\right)^{(2016-k)}\right] = C_{2016}^0 (1 + x^3)\left(e^{x^3}\right)^{(2016)} +$$

$$+ C_{2016}^1 (1 + x^3)^{(1)} \left(e^{x^3}\right)^{(2015)} + C_{2016}^2 (1 + x^3)^{(2)} \left(e^{x^3}\right)^{(2014)} + C_{2016}^3 (1 + x^3)^{(3)} \left(e^{x^3}\right)^{(2013)}$$

$$+ C_{2016}^{2016} (1 + x^3)^{(2016)} e^{x^3}$$

Ta lại có: $(1+x^3)' = 3x^2, (1+x^3)^{(2)} = 6x, (1+x^3)^{(3)} = 6, (1+x^3)^{(n)} = 0$ với mọi $n \geq 4$.

$\Rightarrow g^{(2016)}(x) = C_{2016}^0(1+x^3)\left(e^{x^3}\right)^{(2016)} + 3C_{2016}^1.x^2.\left(e^{x^3}\right)^{(2015)} +$

$+ 6C_{2016}^2.x.\left(e^{x^3}\right)^{(2014)} + 6C_{2016}^3\left(e^{x^3}\right)^{(2013)}$.

Sử dụng khai triển M

aclaurin, ta có:

$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{x^6}{2!} + \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{12}}{4!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{n!} + o(x^{3n})$.

$\Rightarrow \left(e^{x^3}\right)^{(n)}(0) = \begin{cases} \frac{n!}{\frac{n}{3}!}, \text{với } n = 3k \in N^* \\ 0, \qquad \text{với } n \neq 3k \in N^* \end{cases}$

$\Rightarrow g^{(2016)}(0) = C_{2016}^0(1+0^3).\frac{2016!}{672!} + 3C_{2016}^1.0^2.0 + 6C_{2016}^2.0.0 + 6C_{2016}^3\frac{2013!}{671!}$

$= \mathbf{A_{2016}^{1344} + 6C_{2016}^3.A_{2013}^{1342}}$.

Câu 4. Hãy xét sự hội tụ của tích phân suy rộng sau

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} dx$$

Ta có: $\cos x - \cos 2x = \cos x - 2\cos^2 x + 1 = \frac{9}{8} - 2\left(\cos x - \frac{1}{8}\right)^2 \leq \frac{9}{8}$.

$\Rightarrow \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} \leq \frac{9}{8x^2}$.

Mà chuỗi $\int_0^{+\infty} \frac{9}{8x^2} dx$ hội tụ nên **chuỗi $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} dx$ cũng hội tụ** .

Câu 5.

Đặt $a_n = \frac{1}{2n-1}$ và $X = \sqrt{2x+1}$.

Xét $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{2(n+1)-1} = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{2n}}{1+\frac{1}{2n}} = 1.$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \frac{1}{\rho} = 1.$

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-1;1)$.

Khi $X = -1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{2n-1}$ hội tụ theo tiêu chuẩn Leibnitz.

Khi $X = 1$ thì chuỗi $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n-1} \sim \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ nên phân kỳ.

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $[-1;1)$.

$\Rightarrow -1 \le x-1 < 1 \Leftrightarrow 0 \le x < 2$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là [0;2).

ĐỀ THI HỌC KỲ MÔN: GIẢI TÍCH 1

Thời gian làm bài: 120 phút

(Kỳ 1 năm học 2018-2019)

Câu I:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(2\cos\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}.\sin\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(2\cos\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}.\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}\right).$$

Do $-1 \le \cos\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2} \le 1$ nên:

$$-2\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)} \le 2\cos\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}.\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)} \le 2\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}$$

Mà $\lim\limits_{x\to\infty}\left(-2\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(2\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}\right) = 0$ nên:

$$\lim_{x\to\infty}\left(2\cos\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}.\sin\frac{1}{2\left(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}\right)}\right) = 0\,.$$

Vậy $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right)=0$.

Câu II:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1}, & x<1 \\ x^2+x-a, & x\ge 1 \end{cases}$$

Với $x<1$, ta có: $f(x)=e^{x-1}$ liên tục.

Với $x>1$, ta có $f(x)=x^2+x-a$ liên tục.

Với $x=1$, ta có: $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(x^2+x-a) = 2-a = f(1)$.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(e^{x-1}) = 1$.

$\Rightarrow f(x)$ liên tục trên R $\Leftrightarrow f(x)$liên tục tại $x=1$ $\Leftrightarrow f(x)$liên tục tại $x=1$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow 2-a=1 \Leftrightarrow a=1$.

Vậy $f(x)$ liên tục trên R khi và chỉ khi $a=1$.

Câu III:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{nếu } |x|<1 \\ x^2 & \text{nếu } |x|\ge 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = g(g(x)) = \begin{cases} x & \text{nếu } |x|<1 \\ x^4 & \text{nếu } |x|\ge 1 \end{cases}$$

Với $|x|<1$, ta có $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$.

Với $|x|>1$, ta có $f(x)=x^4 \Rightarrow f'(x)=4x^3$.

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |x|<1 \\ 4x^3 & \text{nếu } |x|>1 \end{cases} (1)$$

Với $x=1$, ta có: $f'(1^+) = 4.1^3 = 4 \ne f'(1^-) = 1$.

$\Rightarrow$ f(x) không có đạo hàm tại $x = 1$. (2)

Với $x = -1$, ta có: $f'((-1)^+) = 1 \neq f'((-1)^-) = 4.1^3 = 4$.

$\Rightarrow$ f(x) không có đạo hàm tại $x = -1$. (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \mathbf{f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{nếu } |x| < 1 \\ 4x^3 & \text{nếu } |x| > 1 \end{cases}}$

Câu IV:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$$

Đặt $x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{1}{\cos^2 t} du$.

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\arctan(\tan t)}{\sqrt{(1+\tan^2 t)^3}} . \frac{1}{\cos^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t\cos t) dt.$$

Đặt $= \begin{cases} u = t \\ dv = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = dt \\ v = \sin t \end{cases}$

$$\Rightarrow I = (t\sin t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{\pi}{2} + \cos t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathbf{\frac{\pi}{2} - 1}.$$

Câu V:

Đặt $a_n = \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$ và $X = (x-2)^2$.

$$\text{Xét } \rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

$\Rightarrow$ Bán kính hội tụ là $R = \dfrac{1}{\rho} = 2.$

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-2; 2).$

Khi $X = -2$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n . \left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n$ phân kỳ do $\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right) \to 1$ khi $n \to +\infty.$

Khi $X = 2$ thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n$ phân kỳ do $\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)^n \to 1$ khi $n \to +\infty.$

$\Rightarrow$ Miền hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n X^n$ là $(-2; 2).$

$\Rightarrow -2 < (x-2)^2 < 2 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{2} < x < 2 + \sqrt{2}$.

Vậy miền hội tụ của chuỗi lũy thừa đã cho là $(2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$.

Mọi đóng góp và thắc mắc xin gửi về:
Link FB: fb.com/tholamtoan
SĐT: 0961250475